



الرياضيات ما قبل جبر الخوارزمي المنسوبة إلى الإمام علي بن أبي طالب U (599 – 662 للميلاد)

د. عباس علي عبد الرضا

رئيس مركز البحوث والدراسات التربوية/ وزارة التربية
في هذا البحث نقدم بعض المسائل الرياضية ما قبل عهد الجبر أي (قبل
اكتشاف الجبر من قبل الخوارزمي)⁽¹⁾. أن المسائل المذكورة في هذا البحث
وجدت منسوبة في كتب التراث إلى الإمام علي بن أبي طالب U . وهي
تبين مدى اضطراره بعلم الرياضيات ، في عهد كانت الرياضيات في الجزيرة
العربية يكاد يكون تداولها محدوداً وعلى أشخاص يعدّون بأصابع اليد.

المقدمة:

بدأ الجبر منذ صدوع نجم الخوارزمي عندما وضع كتابه الشهير
"الجبر والمقابلة"⁽²⁾ وكان عملاً ممهداً لهذا العلم . وصف الخوارزمي كيف انه
قدم حلولاً وبصيغ مختلفة لمعادلات جبرية من الدرجة الثانية مع تقديم البرهان
للطريقة التي يستخدمها ، ولم يكتف بذلك ، بل ذهب إلى إنشاء معادلة تمثل
التبسيط لحل المسألة الجبرية ، وقال لويس شارلز كاربينسكي في كتابه عن
الخوارزمي : "بأن الخوارزمي هو الأستاذ الكبير في عصر بغداد الذهبي إذ أنه
أحد الكتاب المسلمين الأوائل الذين جمعوا الرياضيات الكلاسيكية من الشرق
والغرب ، مُحَفِّظِينَ بها حتى افادت منها أوروبا المُتَقِظَةُ آنذاك . أن لهذا الرجل
معرفة كبيرة ويدين له العالم بمعرفتنا الحالية لعلمي الجبر والحساب " .⁽³⁾
الخوارزمي في كل محاولاته ، استطاع ان يتعرض الى عملية الضرب والقسمة
في صيغ رياضية تدخل فيها المجاهيل لإيجاد قيمها بحركة أطلق عليها الجبر



والمقابلة. لقد تعلم الأوربيون الجبر ، ومن دون أدنى شك ، من أعمال الخوارزمي . يقول العالم الرياضي الفرنسي (Viète) : " وحتى الآن كان الجبر والمقابلة⁽⁴⁾ ذلك الفن العظيم الذي هو قطعة الذهب الذي لا يمكن اخفائها لبريقها، فقد عرفه علماء الرياضيات من استخدامهم لهذا الفن ".⁽⁵⁾ وقد أشار (Cardan) العالم الرياضي الإيطالي: " إن هذا الفن نشأ مع محمد بن موسى الخوارزمي"⁽⁶⁾، وقد سجل لنا التاريخ ، أن أسس علم الجبر جاءت من كتاب (الجبر والمقابلة) لمحمد بن موسى الخوارزمي والذي منه اشتقت كلمة (Algebra) الى اللغة الانكليزية . أن جبر الخوارزمي له مدة حضارة طويلة تبدأ من الرياضيات البابلية ومرورا بالعصر الذهبي للهندسة الانشائية في عصر اقليدس . علماً أن مستوى الرياضيات قبل الخوارزمي كان يتعامل مع الالغاز والحزورات. ومن الامور التي تستحق الملاحظة في هذا المجال أن هناك عددا من المسائل الرياضية المنسوبة للإمام علي بن أبي طالب U مثيرة للإهتمام إذ انها ذات طبيعة جبر ما قبل الخوارزمي. إلا أن (King)⁽⁷⁾ و (Berggren)⁽⁸⁾ قد ادخلا معلومات الى تاريخ الرياضيات مقتسبة من دون ذكر مصدرها بخصوص مسألة منسوبة الى الامام علي بن ابي طالب U . على الرغم من ان كتب التراث العربية القديمة والحديثة قد ذكروا تلك المسائل تحت عنوان " رياضيات الامام علي " ، وانها من محاولاته الرائعة في رياضيات ما قبل الجبر. فقد رصد الباحث في كتب التراث ست من تلك المسائل التي حيرت العقول حتى اكتشاف الجبر من قبل الخوارزمي.

الفصل الأول

الجبر و الحساب عند الإمام علي بن أبي طالب U

عثر الباحث مؤخرا و من خلال تقرير كتبه (David King) في مجلة المساق اللندنية والذي أشار فيه: ان المكان الذي بدأ به الجبر في العصر الاسلامي كان منذ بدايات القرن الاول الهجري/ السابع الميلادي. وعلى هذا فوجد الباحث انه من الضروري عرض بعض فقرات هذا التقرير لما له علاقة



مع موضوع البحث حول جبر الامام علي ابن ابي طالب U قبل جبر الخوارزمي. وهذا التقرير عن الجبر والمقابلة في القرن السابع الميلادي موجود في مخطوطة تم نسخها في اليمن في عام 1008 هجري / 1600 للميلاد وقد حفظت في حيدرآباد، تتحدث عن الجبر والمقابلة طوال مدة العصور الوسطى حيث لم يكن للرياضيات شهرة بين الناس. ويقول (David King): أن المخطوطة الاصلية كان قد كتبها عالم يماني في القرن السابع الهجري ، يدعى الخزاعي⁽⁹⁾. وتكتسب هذه المخطوطة اهمية لأنها انطوت على معلومات عن الجبر والمقابلة عند شخص معروف وهو صهر وابن عم النبي محمد ، ألا وهو علي بن ابي طالب الذي كان الخليفة الرابع للمدة (35-40 هـ/656-661م) ، والذي عنه وصل تراث يعبر عن براعته وابداعاته في مجالات كثيرة. إن الذي يهمننا من الموضوع ان الخوارزمي⁽¹⁰⁾ لم يشير في مقدمة كتابه (الجبر والمقابلة) عن المعلومات التي وردت في تلك المخطوطة التي كتبت في القرن السابع الميلادي، أي قبل اكتشافه للجبر بمائة عام أو أكثر، ولم يعدها احد مصادر كتابه الشهير . لكنه مجرد أشار الى انه كتب (الجبر والمقابلة) بأمر من الملك العباسي المأمون بن هارون الرشيد (198-218 هـ/ 813-833 م). وما يؤيد محتوى التقرير ، أن الامام علي بن طالب U كانت لديه معرفة كبيرة عن الجبر والمقابلة في عصر لم يكن هذا العلم معروفاً في الجزيرة العربية . وننقل أدناه هذه الفقرة من التقرير وكما وردت في المخطوطة المحفوظة في خزانة حيدر آباد: ((... حدثني الفقيه الأجل أبو بكر ابن محمد اليفرشي بزييد [في اليمن] ، قال : يُروى أن قوماً من فارس وصلوا [المدينة المنورة]⁽¹¹⁾ في خلافة عمر بن الخطاب [إدَعَوْ] بعلم الجبر والمقابلة ، فأشار علي بن ابي طالب رضي الله عنه على عمر بن الخطاب بأن يجري لهم نفقة من بيت المال ويعلمون [يعلمونه] الناس ، فأجابه [الخليفة] الى ذلك. فيروى أن علياً رضي الله عنه أدرك ما معهم من الجبر والمقابلة في خمسة أيام ، ثم كان الناس بعد ذلك يتداولون هذا العلم بالسنتهم من غير ان يوضع في كتاب حتى



إنتهت الخلافة إلى المأمون ، وقد إندرس [هذا العلم] فذكر ذلك عند المأمون ، فسأل عن من له خبرة ، فلم يوجد من له خبرة غير الشيخ ابو بكر [الاصح هو ابو عبدالله] محمد بن موسى الخوارزمي. فطلب المأمون منه وضع [أي تأليف] كتاب في الجبر والمقابلة ليحيي به ما دُرس منه ، فاجاب الى وضع هذا الكتاب ليقيد به [ليسجل به] أصول الجبر والمقابلة ويقاس عليه..⁽¹²⁾

ولا يعتقد (David King) ان هذا التقرير في المخطوطة اليمنية من تلفيق اتباع الامام علي ابن ابي طالب U ، ولا يبدو فيها افتراء من هذه الفئة ، ولو كان كذلك لضمنوه في كتاب نهج البلاغة ، الذي هو عبارة عن مجموعة من الخطب والمواعظ و الرسائل ، واقوال الحكمة والتي تنسب إليه. ويستند (David King) الى أن الذين رَوَوا ذلك التقرير هما من الطائفة السنية ، وهما العالم اليمني الخزاعي الذي يروي عن الفقيه ابو بكر بن محمد اليفرشي وكان احداث ذلك في زبيد⁽¹³⁾ ، بدليل انهما ألحقا بعد ذكر اسم علي بن ابي طالب بـ(رضي الله عنه) ، وهذا ما لا يقوله أتباعه من الشيعة ، حيث انهم يلحقون اسمه بـ U ويذكر (David King) في نهاية تقريره انه واثناء زيارته لمدينة زبيد في اليمن عام 1974 وجد ان هناك ثمة اعتقاد ، وفي أسطورة شعبية في اليمن، التي سمعها عدة مرات خلال زيارته ، ومفادها: " أن الجبر أخترع في زبيد"، و حالياً لها رواج في اليمن و التي تتحدث ايضاً عن أصل الجبر إنما كان قد اكتسبه زبيد من علي بن ابي طالب U ، على الرغم من انه لم يقم ولو بزيارة واحدة لليمن ، و كان ذلك في السنة 9هـ/630م، أثناء خلافة الخليفة عمر بن الخطاب t والذي كان نشاطه محصوراً بين مكة المكرمة والمدينة المنورة.

ولكن الباحث لا يتفق مع (David King) من أن الامام علي بن ابي طالب U لم يقم بزيارة لليمن ، بل أن المصادر التاريخية تشير الى ان رسول الله 6 كان قد بعث الامام علي U الى اليمن للقضاء والمواريث: فقد روى الكل ان رسول الله 6 قد بعثه الى اليمن⁽¹⁴⁾ قاضياً وقد دعى له بقوله:



((اللهم اهدي قلبي وثبت لسانه)) ، قال الامام علي : فما شككت بعدها في قضاء بين اثنين. وذكر ابن الدمشقي ⁽¹⁵⁾ : وقد بعث النبي 6 علياً U إلى اليمن قاضياً، فقال: يا رسول الله بعثتني أقضي بينهم وأنا شاب لا أدري ما القضاء فضرب النبي 6 صدره وقال: اللهم أهده وثبت لسانه قال: فوالذي فلق الحبة وبرأ النسمة ما شككت في قضاء بين اثنين، رواه أبو داود وقال: صحيح الإسناد. ⁽¹⁶⁾ وهناك رواية أخرى ذكرها صاحب كتاب أعيان الشيعة ⁽¹⁷⁾ تؤكد أن الامام علي بن أبي طالب U قد حلّ في اليمن لمنصب القضاء: ((يُقال: إنه رُفِعَ للإمام علي بن أبي طالب U، و هو باليمن، زُبِيَّة ⁽¹⁸⁾، حُفِرَتْ لأَسَدٍ فوقَ فيها ، فوقف على شفير الزبية رجل فلزّت قدمه فتعلق بآخر و تعلق الآخر بثالث و تعلق الثالث برابع فأفترسهما الأسد . فقضى [الإمام U] أن الأول فريسة الأسد و على أهله ثلث الدية للثاني ، و على أهل الثاني ثلثا الدية للثالث ، و على أهل الثالث الدية الكاملة للرابع . فبلغ ذلك رسول الله 6 فقال : لقد قضى أبو الحسن فيهم بقضاء الله U فوق عرشه. ورويت هذه الحادثة بصور أخرى وهي أن الزبية لما وقع فيها الأسد أصبح الناس ينظرون إليه و يتزاحمون ويتدافعون حول الزبية فسقط فيها رجل تعلق بالذي يليه وتعلق الآخر بالآخر حتى وقع فيها أربعة فقتلهم الأسد . فأمرهم أمير المؤمنين U أن يجمعوا دية تامة من القبائل الذين شهدوا الزبية ونصف دية وثلث دية وربع دية ، فأعطى أهل الأول ربع دية من أجل أنه هلك فوقه ثلاثة، وأعطى أهل الثاني ثلث الدية من أجل أنه هلك فوقه اثنان وأعطى أهل الثالث النصف من أجل أنه هلك فوقه واحد ، وأعطى أهل الرابع الدية تامة لأنه لم يهلك فوقه أحد فأخبروا رسول الله 6 فقال : هو كما قضى.

والظاهر أنهما واقعتان ، ففي الرواية الأولى أن الأول زلّت قدمه فوق ولم يرمه أحد، وفي الرواية الثانية أن المجتمعين تزاحموا وتدافعوا فيكون سقوط الأول بسببهم و لذلك اختلف الحكم فيها .



ان ما نستخلصه من هذا التقرير والروايات التي وردت في التراث ، أن الامام علي بن طالب U كانت لديه الخبرة والمعرفة التامة بالجبر والمقابلة ، بدليل انه جلس مع علماء فارس في الجبر والمقابلة، خمسة أيام فأدرك منهم أنهم علماء بهذا الفن من الرياضيات ، ومن المعروف (ان الذي يُخبر عن شخص انه عالم في فن من الفنون هو بالضرورة أعلم منه)، لأنه غلبه في العلم فكان أعلم منه⁽¹⁹⁾، فيبدو أن الإمام علي U ، كان خبيراً⁽²⁰⁾ في هذا العلم، فهو بعلمه وبخبرته أخبر خليفة المسلمين عمر بن الخطاب عن الجبر والمقابلة الذي كان عندهم. والخبرة التي لديه هي أبلغ من العلم لأنها علمٌ وزيادة ، لانه كان على علم ببيان خصائص الجبر والمقابلة وله الدربة في تجريبه وامتحانه، فأحاط بتفاصيله الدقيقة وألمّ بخصائصه اللصيقة ووصفه على حقيقته ، بدليل انه اقترح على الخليفة عمر ان يجري لهم راتباً من بيت المال ويعلمونه الناس لما له من اهمية في تحقيق متطلبات الشريعة من الرياضيات.⁽²¹⁾ وتلك الميزة ليست ببعيدة عنه U ، فقد ذكر لنا اغلب من كتب عن علمه U بانه : هو الذي عنده العمق بالعلوم ، وكان دائماً اشمل من غيره من الصحابة ، وكانت له السعة في معظمها ، وعنده القابلية في الاجابة السريعة والمباشرة لكل سؤال وبدون انتظار وتروي ، لما كان عنده من رصيد معرفي ربّاني. وهو الذي تربى في أحضان النبوة ونهل علمه منها ، حيث يقول الرسول الكريم محمد 6 عنه : ((أنا مدينة العلم وعلي بابها، فمن أراد العلم فليأت بابها))⁽²²⁾ وفي هذا المقام يقول عباس محمود العقاد : فقلّ أسمعنا بعلم من العلوم الإسلامية أو العلوم القديمة لم ينسب إليه [أي للإمام علي]، و قلّ أن تحدث الناس بفضل لم ينحلوه إياه ، و قلّ أن يوجه الثناء بالعلم إلى أحدمن الاول إلا كانت له مساهمة فيه⁽²³⁾ . فصار عالماً متمكناً في علوم متعددة من ضمنها علمه بالجبر والحساب التي تخص توزيع الارث وتحصيل الزكاة التي لا تحل إلا باستعمال الكسور. وفي هذا المقام يقول ايضاً: وفي أخباره، مما يدل على علمه بأدوات الفقه كعلمه بنصوصه وأحكامه . ومن هذه الأدوات علم الحساب الذي كانت معرفته به أكثر



من معرفة فقهية صرف في معضلة المواريث ، لأنه كان سريع الفطنة إلى حيله التي كانت تعدّ في ذلك الزمن ألغازاً تكدّ في حلها العقول⁽²⁴⁾ .

الفصل الثاني

المسائل الجبرية - الحسابية المنسوبة للإمام علي U

سيحاول الباحث في هذه الدراسة أن يبين إبداعات الإمام علي U وبراعته في علم الجبر والحساب من خلال النظر في مسائل كان قد حلها بسرعة و دقة تامة، مما يدل على تضلعه بعلم الجبر والحساب آنذاك:

المسألة الأولى : (تقاسم الحصص):

[جلس رجلان يتغذيان ، وكان مع أحدهما خمسة أرغفة ومع الآخر ثلاثة أرغفة ، فلما وضع الغذاء بين أيديهما مرّ رجل فسلم . فقالا : اجلس للغداء . فجلس وأكل معهم ، وأتوا في أكلهم على الأربعة الثمانية ، فقام الرجل وطرح إليهما ثمانية دراهم وقال : خذا هذا عوضاً عما أكلتُ لكما ونلته من طعامكما . ففتازعا ، وقال صاحب الأربعة الخمسة : لي خمسة دراهم ولك ثلاثة . فقال صاحب الثلاثة أرغفة : لا أرض إلا أن تكون الدراهم بيننا نصفين . وترافعا إلى أمير المؤمنين علي U فقصا عليه قصتهما ، فقال لصاحب الأربعة الثلاثة : عرض عليك صاحبك ما عرض ، وخبزه أكثر من خبز كفارص بالثلاثة ، فقال : لا والله لا رضيت منه إلا الصواب . حر الحق أي خالصه . فقال علي U : ليس لك في حر الحق إلا درهم واحد وله سبعة دراهم . فقال الرجل : سبحان الله يا أمير المؤمنين ، هو يعرض علي ثلاثة ، فلم أرض ، وأشرت عليّ بأخذها فلم أرض ، وتقول لي الآن انه لا يجب لي في حر الحق إلا درهم واحد ! . فقال علي U : عرض عليك صاحبك أن تأخذ الثلاثة صلحاً ، فلم ترض إلا بحر الحق ، ولا يجب لك بحر الحق إلا درهم واحد . فقال الرجل : عرفني بالوجه في حر الحق حتى أقبله . فقال علي U : أليس للثمانية أرغفة (أربعة وعشرون ثلثاً) أكلتموها أنتم الثلاثة ، ولا يُعلم منكم الأكثر أكلاً ولا الأقل فتحمّلون في أكلكم على السواء . فقال : بلى يا أمير المؤمنين .



فقال علي U : (فأكلت أنت ثمانية أثلاث ، وليس لك إلا تسعة أثلاث ، وأكل صاحبك ثمانية أثلاث ، وليس له إلا خمسة عشر ثلثاً ، أكل منها ثمانية فيبقى له سبعة ، وأكل ثالثكما واحد من تسعة ولصاحبك سبعة من خمسة عشر ، فلك واحد بواحدك ، وله سبعة بسبعته . فقال الرجل : رضيت الآن)⁽²⁵⁾

الحل التقليدي لهذه المسألة:

يتبين لنا أن الامام علي بن أبي طالب U قد ارتجل الحل الرياضي لهذه المسألة من دون تحضير مثل ما يفعله الرياضيون في طريقة حلهم للمسائل الرياضية ، وليس غريباً عليه فهو باب مدينة العلم. و الاجراءات الآتية هي محاولة لحل المسألة بالطريقة التقليدية: من المعلوم ان ثلاثة رجال كانوا قد أكلوا ثمانية أرغفة من الخبز ، فلذلك:

$$\text{فان كل رجل قد أكل} \quad 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} = \text{(رغيف)}$$

وهذا يعني ان الرجل صاحب الخمس أرغفة كان قد أكل من ارغفته (رغيفين و $\frac{2}{3}$ من الرغيفة).

فالذي بقي من حصته البالغة خمسة أرغفة $= 5 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$ (رغيفان وثلث الرغيف).

وبنفس الطريقة للرجل الثاني ، صاحب الثلاث أرغفة ، والذي أكل ايضاً (رغيفين وثلثا الرغيف) .

لذا فإن الذي تبقى من حصته البالغة ثلاثة أرغفة $= 3 - 2\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (الباقي ثلث رغيف فقط).

وكذا الحال بالنسبة للرجل الثالث (صاحب الدراهم) ، فهو أكل ايضاً $(2\frac{2}{3})$ رغيف، وهذا يعني انه قد أكل من رغيف الرجل الاول ما مقداره $(2\frac{1}{3})$ رغيف ، ومن رغيف الرجل الثاني ما مقداره $(\frac{4}{3})$ رغيف. وهذا يعني الدراهم الثمانية يجب ان تقسم بالنسب الآتية: $2\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ أو $\frac{7}{3} : \frac{1}{3}$ ، و بما أن مقام النسب هو 3 ، فيمكن تمثيلها بالصيغة الآتية:



الرياضيات ما قبل جبر التوافقي (المنسوبة إلى علي بن أبي طالب

بما ان مجموع الحصص = 7 + 1 = 8 ، فبموجب قاعدة تقسيم الحصص فإن :
 $1 \text{ درهم} = \frac{8 \text{ درهم}}{8 \text{ حصص}}$ وبما أن الرجل صاحب الخمسة أرغفة كان مجموع حصصه = 7 ،

وهذا يعني: انه يستلم (7 حصص) × (1 درهم) = 7 درهم ،
 بينما الرجل صاحب الثلاثة أرغفة يستلم (1 حصص) × (1 درهم) = 1 درهم .
حل آخر للمسألة: كما ملاحظ ان المحاولة أعلاه اعتمدت على استعمال الكسور، إلا ان تلك الطريقة وان كانت مفهومة لدى طلبة المرحلة الثانوية، فقد لا تكون كذلك مع تلاميذ المرحلة الابتدائية .

فلنمثل كل رغيفة خبز بدائرة مناسبة قطرها وحدة واحدة.

لذا فإن:

الرجل الاول ، صاحب الخمسة أرغفة تمثل بخمسة دوائر ، والرجل الثاني صاحب الثلاثة أرغفة تمثل بثلاث دوائر. لاحظ شكل (1).

الرجل الأول :

الرجل الثاني :

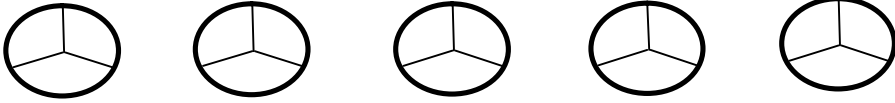
شكل (1) يبين تمثيل الارغفة بدوائر اقطارها وحدة واحدة.

على فرض أن الثلاثة قد أكلوا بالتساوي ، وهذا يعني ، علينا ان نقسم كل دائرة الى ثلاثة قطاعات متساوية. فعليه ، فالرجل الاول قد ساهم بخمسة عشرة جزءاً متساوية ، بينما الرجل الثاني ساهم بتسعة اجزاء متساوية ايضاً للأجزاء التي قدمها الاول.



لاحظ شكل (2).

15 جزء =



9 اجزاء =



شكل (2) يبين الحصص التي ساهم فيها كل رجل.

إذن ، فمجموع الاجزاء = 15 جزء + 9 جزء = 24 أجزاء (على فرض أن كل الاجزاء متساوية و وكل جزء يساوي ثلث الدائرة).
وكل رجل من الرجال الثلاثة قد أكل من الاجزاء = $\frac{24}{3} = 8$ أجزاء (او ثمانية أثلاث).

وهذا يعني أن الرجل الاول قد ساهم $8 - 15 = 7$ اجزاء (أو سبعة أثلاث) للرجل الثالث (الضيف) ، بينما ساهم الرجل الثاني $8 - 9 = 1$ جزء (او ثلث واحد فقط) للرجل الثالث .

لذلك فإن الثمانية دراهم يجب ان تقسم للرجلين على اساس عدد الاجزاء التي ساهم كل واحد منهم في حصة الرجل الثالث. فعليه ، وعلى اساس ذلك ، الرجل الاول ينبغي ان يأخذ (7) دراهم ، والرجل الثاني يأخذ (1) درهم.
وهذا ما حكم به الامام علي بن ابي طالب U للرجلين.

المسألة الثانية : (الجمال السبعة عشر):

فبكتاب (مشكلات العلوم) للنراقي وعن شرح بديعه ابن المقرئ أنه جاء إلى أمير المؤمنين U ثلاثة رجال يختصمون في سبعة عشر بغيراً . أولهم يدعي نصفها و ثانيهم ثلثها ، وثالثهم تسعها . فاحتاروا في قسمتها ، لأن في ذلك سيكون كسراً (أي جزء من بغير). فقال U : أترضون أن أضع بغيراً مني فوقها و أقسمها بينكم ، قالوا : نعم ، فوضع U بغيراً بين الجمال ،



فصارت ثمانية عشر ، فأعطى الأول نصفها و هو تسعة ، و أعطى الثاني ثلثها وهو ستة، وأعطى الثالث تسعها وهو اثنان و بقي بعير له. ⁽²⁶⁾ لماذا كذلك؟ لأن مجموع الكسور الثلاثة $(1/2, 1/3, 1/9)$ لا يساوي واحد، ولذلك تحتاج لأضافة $1/18$:

$$1 = 1/18 + 1/9 + 1/3 + 1/2$$

$$1 = \frac{18}{18} = \frac{1+2+6+9}{18}$$

شرح الحل: في أول وهلة ، و لهكذا نوع من الاسئلة ، قد يهتدي أحدنا الى حل غير منطقي (funny solution) ، وبالنحو الآتي:

$$\text{حصة المدعي الأول من الجمال} = 1/2 \times 17 = 8 \frac{1}{2} \text{ جمل ،}$$

$$\text{حصة المدعي الثاني من الجمال} = 1/3 \times 17 = 5 \frac{2}{3} \text{ جمل ،}$$

$$\text{حصة المدعي الثالث من الجمال} = 1/9 \times 17 = 1 \frac{8}{9} \text{ جمل .}$$

فتكون مجموع الحصص الموزعة على المدعين الثلاثة $8 \frac{1}{2} + 5 \frac{2}{3} + 1 \frac{8}{9} = 16 \frac{1}{8}$ جمل و ثمن الجمل،

اي أن الذي بقي من الـ 17 جمل = 17 جمل - $16 \frac{1}{8}$ جمل = $16 \frac{7}{8}$ جمل من الجمل الواحد ، والذي يقسم بينهم بحسب النسب المساهمة:

$$\text{المدعي الأول} = \frac{17}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{18} \times \frac{1}{2} \text{ ، والمدعي الثاني} = \frac{17}{18} \times \frac{1}{3}$$

$$\text{والمدعي الثالث} = \frac{17}{18} \times \frac{1}{9}$$

ومن المعروف أن لا أحد من المدعين الثلاث يرضى أن يُنحر بعيره بهذه الطريقة ، فضلاً عن ذلك ان هكذا نوع من القسمة لا توصلنا الى نتيجة نهائية.

ولكن من الممكن ان نوضح حل الامام علي بن ابي طالب U باستعمال طريقة التقسيم التناسبي (Proportional Division)، لإيجاد حصص المدعين الثلاث متوافقاً ما اتخذه الامام U من خلال الإجراء الرياضي الآتي :

$$\text{مجموع نسب الحصص} = 1/2 + 1/3 + 1/9 = \frac{2+6+9}{18} = \frac{17}{18} \text{ ، فتكون :}$$



$$\text{نسبة حصة المدعي الأول} = \frac{18}{2} = \frac{18}{17} \times \frac{17}{2} = \frac{17/2}{17/18} = \frac{1/2 \times 17}{17/18} = \frac{17}{18} = 9 \text{ جمل،}$$

$$\text{نسبة حصة المدعي الثاني} = \frac{18}{3} = \frac{18}{17} \times \frac{17}{3} = \frac{17/3}{17/18} = \frac{1/3 \times 17}{17/18} = \frac{17}{18} = 6 \text{ جمل،}$$

$$\text{نسبة حصة المدعي الثالث} = \frac{18}{9} = \frac{18}{17} \times \frac{17}{9} = \frac{17/9}{17/18} = \frac{1/9 \times 17}{17/18} = \frac{17}{18} = 2 \text{ جمل.}$$

أن الحل الذي وضعه الامام علي U لمسألة الجمال هذه ، بقسمته للجمال الـ 17 بين المدعين الثلاث من دون نحر واحد من الجمال ، لعله كان إجراء رياضي غير مفهوم لإنسان القرن السابع الميلادي ، لأنه كان يتعامل مع كسور وليس اعدادا صحيحة ، و لايمكن له حتى التخيل كيف تمت عملية قسمة الكسور بالطريقة التي يفهما الانسان اليوم. ولكن التاريخ يروي لنا ان الامام علي ابن ابي طالب U قد ارتجل الحل وليس لأكثر من دقيقتين.

و الآن وبعد تطور الرياضيات ممكن لنا أن نفهم كيف أجرى الامام U جمع وقسمة تلك الكسور في ذهنه. فالامام U قام اولاً بمحاولة جمع تلك الكسور (نسب الحصص) ، ثم وجد المضاعف المشترك الاصغر (لمقاماتها (The Least Common Denominator, LCD). ويُعرّف المضاعف المشترك الاصغر بأنه : المضاعف المشترك الأصغر هو أقل عدد يقبل القسمة على مجموعة من الاعداد بدون باقي ، و لا يمكن جمع الكسور الاعتيادية إلّا بعد توحيد مقاماتها⁽²⁷⁾ ، وذلك بإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وكتابة الكسور من جديد بمقامات مساوية للمضاعف المشترك الاصغر ، وبسط كل كسر يساوي حاصل قسمة المضاعف المشترك الاصغر على المقام الأصلي مضروباً في البسط الأصلي ، ثم تجري عملية الجمع على البسوط فقط و يبقى المقام نفسه للناتج.⁽²⁸⁾ ففي هذه الحالة : $\frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{3 \times 1} + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ ، فالمضاعف المشترك الأصغر $18 = 3 \times 3 \times 2$.



$$\frac{2}{18} + \frac{6}{18} + \frac{9}{18} = \frac{2+6+9}{18}$$

فعلية بعد توحيد المقامات نحصل على:

$$\frac{2}{(17+1)} + \frac{6}{(17+1)} + \frac{9}{(17+1)}$$

رواية أخرى للمسألة:

ووردت في التراث رواية أخرى لهذه المسألة ، ولعلها حالة ثانية وردت الى دار القضاء للإمام علي بن أبي طالب U ، وهي كما يأتي: [أنه جاء الى دار القضاء في الكوفة ثلاثة رجال يختصمون في تسعة عشر بغير الى الامام علي بن أبي طالب U . أولهم يدعي نصفها و ثانيهم ربعها ، وثالثهم خمسها. فاحتاروا في قسمتها كل حسب حصته وبدون باقي ، لأن في ذلك سيكون كسراً (أي جزء من بغير). فقال U : أترضون أن أضع بغيراً مني فوقها و أقسمها بينكم ، قالوا : نعم ، فوضع U بغيراً بين الجمال ، فصارت عشرين جملاً ، فأعطى الأول نصفها وهو 10 ، وأعطى الثاني ربعها وهو 5 ، وأعطى الثالث خمسها وهو أربعة وبقي بغير له ، فامر الامام حاجبه بان يرجع بغيره الى مكانه .

كما هو معلوم ان المضاعف المشترك الاصغر لهذه المسألة هو كما

يأتي:

$$\frac{1}{5 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$20 = 5 \times 4$$

والذي هو

(19 جمل + 1 جمل) ، ثم بعد توحيد المقامات نحصل على:

$$\frac{4}{(19+1)} + \frac{5}{(19+1)} + \frac{10}{(19+1)} = \frac{4}{20} + \frac{5}{20} + \frac{10}{20} = \frac{10+5+4}{20}$$

وبموجب ذلك سيحصل المدعي الاول على عشرة جمال ، والمدعي الثاني على خمسة جمال ، والمدعي الثالث على أربعة جمال. والمجموع هو تسعة عشر جملاً هو ذات العدد المتخاضم عليه من دون نقصان او زيادة ومن دون



كسر باقٍ . وباستعمال طريقة التقسيم التناسبي (Proportional Division) ممكن توضيح المسألة:

$$\frac{19}{20} = \frac{10+5+4}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \text{مجموع الكسور للحصص}$$

فعليه تكون حصصهم وفق التالي:

$$\text{حصة المدعي الأول} = 10 \text{ جمل} = \frac{20}{19} \times \frac{19}{2} = \frac{19}{2} = \frac{19 \times \frac{1}{2}}{\frac{19}{20}}$$

$$\text{حصة المدعي الثاني} = 5 \text{ جمل} = \frac{20}{19} \times \frac{19}{4} = \frac{19}{4} = \frac{19 \times \frac{1}{4}}{\frac{19}{20}}$$

$$\text{حصة المدعي الثالث} = 4 \text{ جمل} = \frac{20}{19} \times \frac{19}{5} = \frac{19}{5} = \frac{19 \times \frac{1}{5}}{\frac{19}{20}}$$

وبهذا قد حصلنا على ذات النتائج التي أعطاها الامام علي بن ابي طالب

. U

ولعل من الممكن لنا بعد تلك المحاولات ان نحصل على صيغة عامة

لمسائل مماثلة :

لنفرض أن: ص = المضاعف المشترك الاصغر للكسور (التي الحصص) ،

ح₁ = كسر حصة المدعي الاول ،

ح₂ = كسر حصة المدعي الثاني ،

ح₃ = كسر حصة المدعي الثالث .

فالصيغة النهائية للحصص تكون كالتالي:

$$\text{حصة المدعي الاول} = \frac{\text{ح}_1 \times \text{ص}}{1\text{ح}_1 + 2\text{ح}_2 + 3\text{ح}_3}$$

$$\text{حصة المدعي الثاني} = \frac{\text{ح}_2 \times \text{ص}}{1\text{ح}_1 + 2\text{ح}_2 + 3\text{ح}_3}$$



$$\text{حصة المدعي الثالث} = \frac{\text{ح}3 \times \text{ص}}{\text{ح}1 + \text{ح}2 + \text{ح}3}$$

المسألة الثالثة :

وردت هذه المسألة في كشكول البهائي : أن يهودياً دخل على الامام علي U وقال : "أخبرني عن عدد يكون له نصف وثُلث وربع وخُمس وسدس وسُبع وثمان وتُسع وعُشر دون أن يكون في الناتج كسر . فقال U إضرب أيام أسبوعك في أيام سننك فتحصل على العدد.⁽²⁹⁾

التوضيح:

$$\begin{aligned} \text{عدد ايام الاسبوع} &= 7 \text{ أيام} \\ \text{عدد أيام السنة} &= 360 \text{ يوم} \\ \text{فحاصل الضرب يساوي العدد} &= 360 \times 7 = 2520 \\ 1260 &= 1/2 \times 2520 \\ 840 &= 1/3 \times 2520 \\ 630 &= 1/4 \times 2520 \\ 504 &= 1/5 \times 2520 \\ 420 &= 1/6 \times 2520 \\ 360 &= 1/7 \times 2520 \\ 315 &= 1/8 \times 2520 \\ 280 &= 1/9 \times 2520 \\ 252 &= 1/10 \times 2520 \end{aligned}$$

وفي رواية اخرى أن احدهم سأل الامام علي ابن ابي طالب U عن عدد يكون له نصف وثُلث وربع وخُمس وسدس وسُبع وثمان وتُسع وعُشر دون أن يكون في الناتج كسر . فقال الامام U مقامات الكسور التي تحتوي على الحرف (عين) فتحصل على العدد.

**التوضيح:**

أن الكسور التي تحتوي على الحرف (عين) هي الرُّبْع و السَّبْع و التُّسْع و العُشْرُ. فحاصل ضربها $= 4 \times 7 \times 9 \times 10 = 2520$ ، وهو نفس العدد الذي حصلنا عليه من حاصل ضرب عدد ايام الاسبوع في ايام السنة. ويمكن أن نجري نفس العمليات الحسابية أعلاه للتأكد من النتائج التي كان الامام U قد اعطاها مرتجلاً وليس كما يفعله الرياضيون.

المسألة الرابعة:

جاء رجل من روما يقصد الامام علي بن ابي طالب U في الكوفة. فسأل الامام علي U عن عدد صحيح تعطي كسوره التسعة أعداداً صحيحة ، وكذلك ، كل عدد صحيح ناتج يعطي ايضا اعداد صحيحة من كسوره التسعة إلا (ربع الثمن) و (سبع السبع) و (ثمن الثمن) و (تسع التسع). فرد الامام علي بن ابي طالب U وبدون تأخير: إضرب ايام اسبوعك في أيام شهرك ، ثم اضرب الناتج في أيام سنتك ، تحصل على ما تريد. فقام الرجل بكل الاجراءات الحسابية المطلوبة، فحصل على العدد 75600 والذي حقق المطلوب اثباته .⁽³⁰⁾

توضيح الحل:

أدناه توضيح للحل الذي أعطاه الامام علي U للرجل الروماني :
عدد ايام الاسبوع = 7 ايام، وعدد ايام الشهر = 30 يوماً، و عدد ايام السنة = 360 يوم، فعليه فلو ضربنا تلك الاعداد سنحصل على العدد المطلوب $= 360 \times 7 \times 30 = 75600$.

§ المجموعة الاولى الناتجة من نصف العدد 75600 والذي يساوي 37800 ، فانه ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة والناتجة من كسوره التسعة لآتية:

$$18900 = \frac{1}{2} \times 37800 \quad \S$$

$$12600 = \frac{1}{3} \times 37800 \quad \S$$



$$9450 = \frac{1}{4} \times 37800 \quad \$$$

$$7560 = \frac{1}{5} \times 7800 \quad \$$$

$$6300 = \frac{1}{6} \times 37800 \quad \$$$

$$5400 = \frac{1}{7} \times 37800 \quad \$$$

$$4725 = \frac{1}{8} \times 37800 \quad \$$$

$$4200 = \frac{1}{9} \times 37800 \quad \$$$

$$3780 = \frac{1}{10} \times 37800 \quad \$$$

§ المجموعة الثانية الناتجة من ثلث العدد 75600 والذي يساوي 25200 ، فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$12600 = \frac{1}{2} \times 25200 \quad \$$$

$$8400 = \frac{1}{3} \times 5200 \quad \$$$

$$6300 = \frac{1}{4} \times 5200 \quad \$$$

$$5040 = \frac{1}{5} \times 5200 \quad \$$$

$$4200 = \frac{1}{6} \times 5200 \quad \$$$

$$3600 = \frac{1}{7} \times 5200 \quad \$$$

$$3150 = \frac{1}{8} \times 5200 \quad \$$$

$$2800 = \frac{1}{9} \times 5200 \quad \$$$

$$2520 = \frac{1}{10} \times 5200 \quad \$$$



§ المجموعة الثالثة الناتجة من ربع العدد 75600 والذي يساوي 18900 ، فإنه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$9450 = \frac{1}{2} \times 18900 \quad §$$

$$6300 = \frac{1}{3} \times 18900 \quad §$$

$$4725 = \frac{1}{4} \times 18900 \quad §$$

$$3780 = \frac{1}{5} \times 18900 \quad §$$

$$3150 = \frac{1}{6} \times 18900 \quad §$$

$$2700 = \frac{1}{7} \times 18900 \quad §$$

§ ماعدا ثمن الربع لا ينتج عددا صحيحاً

$$2100 = \frac{1}{9} \times 18900 \quad §$$

$$1890 = \frac{1}{10} \times 18900 \quad §$$

§ المجموعة الرابعة الناتجة من خمس العدد 75600 والذي يساوي 15120 ، فإنه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$7560 = \frac{1}{2} \times 15120 \quad §$$

$$5040 = \frac{1}{3} \times 15120 \quad §$$

$$3780 = \frac{1}{4} \times 15120 \quad §$$

$$3024 = \frac{1}{5} \times 15120 \quad §$$

$$2520 = \frac{1}{6} \times 15120 \quad §$$



$$2160 = \frac{1}{7} \times 15120 \quad \S$$

$$1890 = \frac{1}{8} \times 15120 \quad \S$$

$$1680 = \frac{1}{9} \times 15120 \quad \S$$

$$1512 = \frac{1}{10} \times 15120 \quad \S$$

(5) المجموعة الخامسة الناتجة من سدس العدد 75600 والذي يساوي 12600 ، فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$6300 = \frac{1}{2} \times 12600 \quad \S$$

$$4200 = \frac{1}{3} \times 12600 \quad \S$$

$$3150 = \frac{1}{4} \times 12600 \quad \S$$

$$2520 = \frac{1}{5} \times 12600 \quad \S$$

$$2100 = \frac{1}{6} \times 12600 \quad \S$$

$$1800 = \frac{1}{7} \times 12600 \quad \S$$

$$1575 = \frac{1}{8} \times 12600 \quad \S$$

$$1400 = \frac{1}{9} \times 12600 \quad \S$$

$$1260 = \frac{1}{10} \times 12600 \quad \S$$

(6) المجموعة السادسة الناتجة من سُبُعُ العدد 75600 والذي يساوي 10800 ، فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$5400 = \frac{1}{2} \times 10800 \quad \S$$

$$3600 = \frac{1}{3} \times 10800 \quad \S$$



$$2700 = \frac{1}{4} \times 10800 \quad \S$$

$$2160 = \frac{1}{5} \times 10800 \quad \S$$

$$1800 = \frac{1}{6} \times 10800 \quad \S$$

§ ماعدا سُبُع السُبُع لا ينتج عدداً صحيحاً.

$$1350 = \frac{1}{8} \times 10800 \quad \S$$

$$1200 = \frac{1}{9} \times 10800 \quad \S$$

$$1080 = \frac{1}{10} \times 10800 \quad \S$$

(7) المجموعة السابعة الناتجة من ثُمْنُ العدد 75600 والذي يساوي 9450 ،
فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$4725 = \frac{1}{2} \times 9450 \quad \S$$

$$3150 = \frac{1}{3} \times 9450 \quad \S$$

§ ماعدا رُبُعُ الثُمْن لا ينتج عدداً صحيحاً.

$$1890 = \frac{1}{5} \times 9450 \quad \S$$

$$1575 = \frac{1}{6} \times 9450 \quad \S$$

$$1350 = \frac{1}{7} \times 9450 \quad \S$$

§ ماعدا ثُمْنُ الثُمْن لا ينتج عدداً صحيحاً.

$$1050 = \frac{1}{9} \times 9450 \quad \S$$

$$945 = \frac{1}{10} \times 9450 \quad \S$$

(8) المجموعة الثامنة الناتجة من ثُسُعُ العدد 75600 والذي يساوي 8400 ،
فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:



$$4200 = \frac{1}{2} \times 8400 \quad \S$$

$$2800 = \frac{1}{3} \times 8400 \quad \S$$

$$2100 = \frac{1}{4} \times 8400 \quad \S$$

$$1680 = \frac{1}{5} \times 8400 \quad \S$$

$$1400 = \frac{1}{6} \times 8400 \quad \S$$

$$1200 = \frac{1}{7} \times 8400 \quad \S$$

$$1050 = \frac{1}{8} \times 8400 \quad \S$$

§ ماعدا تسعُ التسعُ لا ينتج عدداً صحيحاً:

$$840 = \frac{1}{10} \times 8400 \quad \S$$

(9) المجموعة التاسعة الناتجة من عُشرُ العدد 75600 والذي يساوي 7560 ،
فانه كذلك ينتج مجموعة الاعداد الصحيحة الناتجة من كسوره التسعة الآتية:

$$3780 = \frac{1}{2} \times 7560 \quad \S$$

$$2520 = \frac{1}{3} \times 7560 \quad \S$$

$$1890 = \frac{1}{4} \times 7560 \quad \S$$

$$1512 = \frac{1}{5} \times 7560 \quad \S$$

$$1260 = \frac{1}{6} \times 7560 \quad \S$$

$$1080 = \frac{1}{7} \times 7560 \quad \S$$

$$945 = \frac{1}{8} \times 7560 \quad \S$$

$$840 = \frac{1}{9} \times 7560 \quad \S$$

$$756 = \frac{1}{10} \times 7560 \quad \S$$



ولكن كيف توصل الامام علي بن ابي طالب U للجواب؟

التوضيح الآتي:

يمثل تصوراً رياضياً للاجراءات التي اتخذها الامام علي U في ذهنه ، والتي مكنته من ينطق بالجواب في اقل من دقيقة: بما ان نصف العدد الذي حصل عليه الرجل الروماني من جراء ضرب ايام الاسبوع في ايام الشهر في ايام السنة ، قد انتج مجموعة من الاعداد الصحيحة من الكسور التسعة والتي هي : $(\frac{1}{10}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ، وهذا يعني:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{18} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{14} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

ومن الملاحظ انه ينبغي ان تكون مجاميع الاعداد التي نحصل عليها من

جراًء حاصل ضرب العدد (75600) في الكسور

التسعة تكون قابلة للقسمة على كل المقامات الناتجة من حاصل الكسور التسعة في بعضها البعض. فمثلاً الاعداد التي حصلنا عليها من جراًء حاصل ضرب العدد (75600) في الكسر $(\frac{1}{2})$ تكون قابلة للقسمة على كل المقامات الناتجة من حاصل ضرب الكسور التسعة في الكسر $(\frac{1}{2})$ وبدون باقي.

فالمضاعف المشترك الاصغر لحاصل ضرب الكسور التسعة في الكسر $(\frac{1}{2})$ ،

يمكن ايجاده بالطريقة التالية: $2 \times 2 \times 2 = 8, 3 \times 2 = 6, 2 \times 2 = 4$

$5 \times 2 = 10, 3 \times 2 \times 2 = 12, 7 \times 2 = 14, 18 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, 2$

$3 \times 3 \times 2 = 20$.

إذن المضاعف المشترك الاصغر لهذه المجموعة $= 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

وباتباع نفس الطريقة أعلاه ، ممكن لنا أن نحصل على المضاعف

المشترك الاصغر من حاصل ضرب العدد (75600) في الكسر $(\frac{1}{3})$ تكون

ايضا قابلة للقسمة على الاعداد الصحيحة الناتجة من جراًء ضرب الكسور



التسعة في الكسر $(\frac{1}{3})$. فالمضاعف المشترك الأصغر لحاصل ضرب الكسور

التسعة في الكسر $(\frac{1}{3})$ ، ممكن إيجاده بالطريقة التالية:

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}, \frac{1}{15} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{27} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{21} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{18} =$$

فعليه:

$$2 \times 3 \times 3 = 18, 5 \times 3 = 15, 2 \times 2 \times 3 = 12, 3 \times 3 = 9, 2 \times 3 = 6$$

$$, 5 \times 2 \times 3 = 30, 3 \times 3 \times 3 = 27, 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24, 7 \times 3 = 21$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$

وبنفس الطريقة نستطيع ان نستخرج المضاعف المشترك الأصغر للمجموعات

الأخرى الناتجة من حاصل ضرب العدد بالكسور التسعة بعضها ببعض:

(1) من الكسر $(\frac{1}{4})$:

$$, 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, 3 \times 2 \times 2 = 12, 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$= 32, 7 \times 2 \times 2 = 28, 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24, 5 \times 2 \times 2 = 20$$

$$5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40, 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36, 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة $2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$.

(2) من الكسر $(\frac{1}{5})$:

$$, 5 \times 5 = 25, 5 \times 2 \times 2 = 20, 5 \times 3 = 15, 5 \times 2 = 10$$

$$= 45, 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40, 7 \times 5 = 35, 5 \times 3 \times 2 = 30$$

$$, 5 \times 5 \times 2 = 50, 5 \times 3 \times 3 = 45$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة $2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$.

(3) من الكسر $(\frac{1}{6})$:



$$12 = 3 \times 2 \times 2, 18 = 2 \times 3 \times 3, 24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$30 = 5 \times 3 \times 2, 36 = 3 \times 3 \times 2 \times 2, 42 = 7 \times 3 \times 2,$$

$$48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2, 54 = 5 \times 3 \times 3 \times 3,$$

$$60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2.$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة = $5 \times 73^3 \times 2^4$.

(4) من الكسر $(\frac{1}{7})$:

$$14 = 7 \times 2, 21 = 7 \times 3, 28 = 7 \times 2 \times 2, 35 = 7 \times 5,$$

$$42 = 7 \times 3 \times 2,$$

$$49 = 7 \times 7, 56 = 7 \times 2 \times 2 \times 2, 63 = 7 \times 3 \times 3,$$

$$70 = 7 \times 5 \times 2.$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة = $5 \times 73^2 \times 2^3$.

ملاحظة: بين الأقواس لا تعطي عددا صحيحاً.

(5) من الكسر $(\frac{1}{8})$:

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2, 24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2, 32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2, 48 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2, 56 = 7 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2, 72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$80 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة = $5 \times 73^2 \times 2^4$.

(6) من الكسر $(\frac{1}{9})$:

$$18 = 2 \times 3 \times 3, 27 = 3 \times 3 \times 3, 36 = 3 \times 3 \times 2 \times 2,$$

$$45 = 5 \times 3 \times 3, 54 = 5 \times 3 \times 3 \times 3, 63 = 7 \times 3 \times 3,$$

$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2, 81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3, 90 = 3 \times 3 \times 5,$$

$$2 \times 5.$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة = $5 \times 73^3 \times 2^3$.



(7) من الكسر $(\frac{1}{10})$:

$$5 \times 3 \times 2 = 30, \quad 5 \times 2 \times 2 = 20$$

$$5 \times 5 \times 2 = 50, \quad 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$$

$$5 \times 3 \times 2 \times 2 = 60$$

$$7 \times 5 \times 2 = 70$$

$$5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

$$5 \times 2 \times 3 \times 3 = 90$$

$$5 \times 5 \times 2 \times 2 = 100$$

إذن المضاعف المشترك الأصغر لهذه المجموعة = $5^2 \times 73^3 \times 2^4$.

و اذا كان بالإمكان نعيد ترتيب المضاعف المشترك الأصغر الأخير بطريقة

نستطيع ان نتوصل الى العدد الذي اهتدى اليه الامام علي بن ابي طالب U :

$$5^2 \times 73^3 \times 2^4 = \text{العدد المطلوب}$$

$$5 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 =$$

$$(5 \times 9 \times 8) \times (2 \times 3 \times 5) \times 7 =$$

$$(360) \times (30) \times (7) =$$

$$= (\text{ايام الاسبوع}) \times (\text{ايام الشهر}) \times (\text{ايام السنة}) .$$

وهذا بالضبط كان جواب الامام علي بن طالب (عليه السلام) للرجل من

روما.

ولكن ثمة سؤال قد يتبادر لذهن القارئ هو : لماذا (ثُمْن الثُمْن) و (ربع

الثُمْن) و (سُبْع السُبْع) و (تُسْع التُسْع)

لا تنتج اعداداً صحيحة؟

الجواب ببساطة كما يأتي:

لنحلل العدد (75600) وكما يأتي:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 75600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 37800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 18900 \end{array}$$



2	9450
5	4725
5	945
3	189
7	63
3	9
3	3
	1

اذن التحليل الرقمي للعدد $75600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$. فنلاحظ ببساطة انه لا يحوي على معامل مثل : 2^5 ، والذي هو ربع الثمن ، او 7^2 والذي هو سبع السبع ، وهكذا.

فمقارنة بسيطة بين الوقت الذي استغرقه الامام علي ابن ابي طالب U في الاجابة وبين التوضيحات المطولة و التي حاولنا فيها اثبات صحة الحل الرياضي للمسألة، ليؤكد لنا ان كل تلك الاجراءات الرياضية جرت في ذهنه U في اقل من دقيقة ، فسبحان الله .

المسألة الخامسة:

يقال : إن امرأة جاءت إلى الإمام ، و شكت إليه أن أخاها مات عن ستمائة دينار ، و لم يقسم لها من ميراثه غير دينار واحد . فقال لها الامام علي U : لعله ترك زوجة و ابنتين و أمّاً و اثني عشر أخاً و أنت ؟ فقالت نعم ، فكان كما قال U . وهنا تتجلى قوة علمه و حدسه فبمجرد أن علم بحصتها فقد استنتج عدد أفراد العائلة ، و ليس فقط ذلك ، بل العلاقة فيما بينهم و جنسهم و حصة كل منهم . حيث أن هذه المرأة كانت تتوقع أن أخاها قد ظلمها لذا طلبت الإنصاف وأخذ حقها . لذلك قال لها خَلْفَ أخوك بنتين لهما الثلثان أربعمائة (أي ثلثي الستمائة هو أربعمائة) . و خَلْفَ أمّاً لها السدس ، مائة (أي سدس الستمائة هو مائة) ، و خَلْفَ زوجة لها الثمن ، خمسة و سبعون (أي ثمن الستمائة هو خمسة و سبعون) . و خَلْفَ معك اثني عشر أخاً لكل أخ ديناران ولك دينار



قالت نعم . فلذلك سُميت هذه المسألة بالدينارية .⁽³¹⁾ ولذلك لو جمعنا هذه الحصص لكان مجموعها ستمائة و هو المبلغ الأصلي.
التوضيح:

$$\text{حصة البنيتين هو } \frac{2}{3} \text{ من الارث} = 600 \times \frac{2}{3} = 400 \text{ دينار ،}$$

$$\text{حصة الأم هو } \frac{1}{6} \text{ من الارث} = 600 \times \frac{1}{6} = 100 \text{ دينار ،}$$

$$\text{حصة زوجة الاخ من الارث} = 600 \times \frac{1}{8} = 75 \text{ دينار ،}$$

مجموع حصص الـ 12 الأخ واخت = 25 حصة ، كل رجل سهمين ، وسهم

$$\text{للأخت} = 600 - (75+100+400) = 25 \text{ دينار}$$

كل أخ يأخذ 2 دينار ، والاخت تأخذ دينار واحد.

المسألة السادسة:

سأل أحد الاصحاب الامام علي بن ابي طالب U عن المسافة بين الشرق والغرب. فاجاب الامام U : (هي مسيرة يوم للشمس) .⁽³²⁾

توضيح الجواب:

من المعروف في ذلك الزمن عندما يقال : مسيرة يوم نحو الشمس ، يعني مجموع الفترة الزمنية المستغرقة بين بداية الليل ونهاية يوم على الارض ، اي 24 ساعة. ومن المعلوم ان سرعة الارض حول محورها تساوي تقريباً 0.5 كم/ثانية.

إذن المسافة بين شرق وغرب الارض = (0.5 كم/ثانية) \times (24 \times 60) = 60 ثانية) = 43200 كم. وهذا فعلاً هو العدد التقريبي لمحيط الارض ، أو طول خط الاستواء.

المسألة السابعة:

سئل الامام علي بن ابي طالب U ذات يوم عن طول محيط الشمس . فأجابهم وبدون أدنى تأخير : (حاصل ضرب 900 في 900 فرسخ).⁽³³⁾



توضيح الجواب:

يعرف الفرسخ بأنه وحدة قياس الطول في العصر الاسلامي . والفرسخ الواحد ما يعادل (3.42 ميل) أو (5.5) كيلومتر تقريباً. فعليه فان محيط الشمس وفق الصيغة الرياضية التي وضعها الامام علي بن ابي طالب U يحسب كما يأتي:

$$\begin{aligned} \text{محيط الشمس وفق الصيغة الامام} &= (900) \times (900 \text{ فرسخ}) \\ &= 810000 \text{ فرسخ} \\ &= 2770200 \text{ ميل} \\ &= 4455000 \text{ كيلومتر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{القطر} &= \text{المحيط} / \text{النسبة الثابتة} \\ &= \frac{4455000}{22/7} = 1417500 \text{ كيلومتر قطر الشمس التخميني في} \end{aligned}$$

القرن السابع الميلادي.

اما القطر الحقيقي للشمس في حسابات اليوم = 1392000 كيلومتر ، اي بنسبة تقريب = 1.8% ، فهي نسبة معقولة.

المسألة الثامنة:

في أحد الايام ، سأل احد الاصحاب امير المؤمنين الامام علي بن ابي طالب U عن المسافة بين الأرض والشمس . فرد عاياه الامام مباشرة ، بقوله: (هي ذات المسافة التي يقطعها فرس سريع بخمسائة سنة) .

توضيح جواب الامام U :

من المعروف لدى اهل الخبرة في الخيول العربية الاصيله انها تقطع 6.5 فرسخ في الساعة ، وهذا يعني :

$$\text{معدل سرعة الفرس السريع} = 6.5 \text{ فرسخ/ساعة} ،$$

$$= (3.42 \times 6.5) = 22.23 \text{ ميل/ساعة، أو}$$

$$= (5.50 \times 6.5) = 35.75 \text{ كم / ساعة} .$$

فعليه فإن المسافة التي يقطعها هذا الفرس في مسير 500 سنة = (السرعة).

$$= (الزمن) = (22.23 \text{ ميل/ساعة}) . (500 \times 12 \times 30 \times 24 \text{ ساعة}) =$$



96033600 ميل ، أو (35.75 كم/ساعة) . $(24 \times 30 \times 12 \times 500)$ ساعة) = 153360000 كيلومتر ويبلغ اليوم متوسط المسافة بين الأرض والشمس بنحو 150 مليون كيلومتر. وتقرر ناسا ان أقرب مسافة من الشمس، والذي يدعوه علماء الفلك بالحضيض (perihelion)، هو 147098074 كم. والمسافة الأبعد من الشمس والذي يدعى بالأوج (furthest)، هو 152097701 كم.⁽³⁴⁾ ويبدو أن المسافة التي قدرها الامام علي ابن ابي طالب U في القرن السابع الميلادي و من دون استخدام الاجهزة المتطورة كانت اقرب الى الأوج ، الذي توصل اليه فلكيو القرن الواحد والعشرين ، و بفارق نسبته 0.65% وهذا يعني انه الاقرب جداً الى العدد في العصر الحديث . و هذا ابداع رياضي وفلكي آخر يضاف الى هذا الذي علّمه الحبيب المصطفى رسول الله 6 ألف باب من العلم ، لينفتح في ذهن علي U الف باب اخرى من العلم. ولكي نكمل وجه المقارنة ، علينا أن نستعرض الخلفية التاريخية لتطور تقدير المسافة بين الأرض والشمس ، وكما نشرته ناسا ، وكالة الفضاء الامريكية في نشرتها عن المجموعة الشمسية مؤخراً : ففي 1573 استطاع العالم الدنماركي (Tycho Brahe)⁽³⁵⁾ ان يُقدر المسافة بين الشمس والأرض في 8 مليون كيلومتر (5 مليون ميل). و في وقت لاحق تمكن (Johannes Kepler)⁽³⁶⁾ ان يُقدرها في 24 مليون كيلومتر (15 مليون ميل). وفي عام 1672 ، أدلى (Giovanni Cassini)⁽³⁷⁾ بتقدير أفضل بكثير باستخدام المريخ. و من خلال مراقبة المريخ من باريس ، وبوجود زميله (Jean Richer)⁽³⁸⁾ ، الذي لاحظ أيضا المريخ في نفس الوقت ، ولكن في غيانا الفرنسية في أمريكا الجنوبية . و من هناك كان لـ (Cassini) قادرا على حساب المسافة من الأرض الى المريخ ، ثم المسافة من الأرض إلى الشمس. فبلغت بنحو 140 مليون كيلومتر (87 مليون ميل) . والذي هو أقل من ذلك، ولكنه قريب جدا من عدد العصر الحديث.⁽³⁹⁾ الجدول التالي يبين الخلاصة التاريخية لتطور حساب العدد التخميني الذي يمثل المسافة بين الأرض والشمس.



المسافة التي قَدَّرَها (كيلومتر)	القرن الذي عاشه	أسم العالم الذي قَدَّرَ المسافة
153,360,000	القرن السابع الميلادي	الامام علي ابن ابي طالب
8,000,000	القرن السادس عشر الميلادي	العالم الدنماركي (Tycho Brahe)
24,000,000	القرن السادس عشر الميلادي	Johannes Kepler
140,000,000	القرن السابع عشر الميلادي	Giovanni Cassini

يبين الجدول تطور التقدير التقريبي للمسافة بين الارض و الشمس.
ويظهر من الجدول ان العدد الذي حصل عليه الامام علي U هو الاقرب
الى العدد في العصر الحديث.

الخاتمة:

إن الذي نريد أن نسجله في هذا البحث معلومات عن أوليات (الجبر
والمقابلة) من انه كان موجود في القرن السابع الميلادي ، لكنه كان غير
مكتوب ، وانما كان يتداوله الناس بالسنتهم وقد اندرس مع مرور الزمن ، ثم
جاء محمد بن موسى الخوارزمي فكتب في هذا العلم ، و وضع له منهاجاً
وضمنه حل لمعادلات جبرية من الدرجة الثانية وخصوصاً في معالجات مسائل
الإرث المعقدة. حيث صار هناك ثمة إعتقاد بوجود تمهيدات للجبر قبل
الخوارزمي. واعتماداً على ما جاء في الوثيقة التي تم الحصول عليها من
المخطوطة اليمينية التي كتبت في القرن السابع الميلادي والمحفوطة في خزانة
حيدر آباد ، وان المعلومات التي وردت فيها تتعلق بشخص يشهد له التاريخ
بعلمه وابداعاته الخارقة في مجالات كثيرة من العلوم ، فلذلك ينبغي العمل على
التصديق بها. ومن خلال اجراء تحقيق تاريخي حولها ، ولعلها تصحح معلومات
تاريخية لا زالت غير مؤكدة عن أصل الجبر. أن المسائل التي عالجها الامام
علي U تضمنت اجراءات رياضية يقف عندها الباحث حيران حول ما ذكر



في التاريخ من ان الجزيرة العربية كانت لا تمتلك تراثا في الرياضيات. لكن الوثيقة التاريخية والمسائل الرياضية تلك تؤكد انه قبل الخوارزمي كانت هناك رياضيات ، والعجب ان الخوارزمي لم يذكرها كمصدر من مصادره التي اعتمد عليها في كتابه الشهير (الجبر والمقابلة) . وهذا مائتركه للباحثين في هذا المجال للغور في بطون تاريخ الرياضيات عند العرب ليكتشفوا لنا الحقائق عن اصل الجبر وكيف بدأ التفكير به، ومن الله التوفيق.

الهوامش :

(1) مُحَمَّد بن مُوسى الخَوَازِمى ولد في بغداد فيما بين سنة 164 وسنة 235 هجرية (الموافق 780-850 ميلادية) وتوفي هناك ، وقد برز في زمن حكم المأمون ، ولمع في علم الرياضيات والفلك حتى عيّنهُ المأمون رئيساً لبيت الحكمة.

(2) Karpinski, L. C. (1915): Latin Translation oh the Algebra of Al-Khwarizmi. The MacMillan Company: New York, London.

(3) المصدر نفسه

أن الجبر يُقصد بها إضافة حدود موجبة تساوي في كميتها الحدود السالبة إلى طرفي المعادلة . أمّا المقابلة فتعني جمع الحدود المتشابهة. (4)

(5) Fauvel, J. & Gray, Jeremy (1998) Ed: The History of Mathematics. MacMillan Press in Association with the Open University: London, Hong Kong.

(6) المصدر نفسه .

(7) King, A. David (1988): A Medieval Arabic Report on Algebra before Al-Khwarizmi. AMasaq, vol. 1, pp. 25-32.

(8) Berggren, J. Lennart (1997): Mathematics and her Sisters in Medieval Islam: A Selective of Work Done from 1985 to 1995, HistoriaMathematica, vol. 24, pp. 407-440.

(9) ليس هناك معلومات متوفرة حالياً عن سيرته الذاتية.

(10) محمد بن موسى الخوارزمي عالم رياضيات ، وفلك ، وجغرافية ، ولد في خوارزم سنة 780 م ، اتصل بالملك العباسي المأمون وعمل في بيت الحكمة في بغداد وكسب ثقة الملك إذ ولاه المأمون بيت الحكمة ، وقبل وفاته في 85م/232 هـ كان الخوارزمي قد ترك العديد من المؤلفات في علوم الفلك والجغرافية من أهمها كتاب الجبر والمقابلة الذي يعد أهم كتبه وقد ترجم الكتاب إلى اللغة اللاتينية في سنة 1135م وقد دخلت على إثر ذلك كلمات مثل الجبر Algebra والصفر Zero إلى اللغات اللاتينية. راجع كتاب مجالات تطبيق الرياضيات في الفقه الاسلامي ، الفصل الخامس.

(11) الاقواس في النص هي من اضافة الباحث لتوضيح المعنى أكثر.

(12) King, A. David (1988): A Medieval Arabic Report on Algebra before Al-Khwarizmi. Al-Masaq, vol. 1, pp. 26.

(13) زبيد مدينة معروفة في اليمن وكان فيها مركزاً مهماً للتعليم في القرن السابع الهجري (626-658 هـ / 1229-1454م).



- (14) أغلب الظن كان قد بعثه الى زييد ، اعتمادا على التقرير الذي نقله كذك ديفيد من المخطوطة.
- (15) ابن الدمشقي ، شمس الدين ابي البركات محمد بن احمد : جواهر المطالب في مناقب علي (رض) . 76/1 . وكذلك انظر : كتاب الانتصار للعالمي ، ج6 ، ص312.
- (16) سنن أبي داود ج:2 ص160 ح3582 باب: كيف القضاء .
- (17) محسن الأمين ، أعيان الشيعة : دار المعارف ، المجلد الاول ، ص 411.
- (18) الزبية : هي حفرة تحفر للأسد سميت بذلك لأنهم كانوا يحفرونها في موضع عال . انظر المنجد في اللغة: باب الزاي.
- (19) المنجد في اللغة : باب الخاء
- (20) الخبير في اللغة على وزن فعيل، هذا الوزن يدل على المبالغة، إذا الخبير من صيغ المبالغة فعلة خبرَ يَخْبُرُ خبراً، وخبرت بالأمر أي علمته، هناك من أعلمني به. راجع لسان العرب.
- (21) عباس علي عبدالرضا ، مجالات تطبيق الرياضيات في الفقه الاسلامي ، الفصل الثالث : دار العباد ، بغداد، 2011.
- (22) عز الدين ابن الأثير الجوزي (1994) ، أسد الغابة في معرفة الصحابة " تحقيق علي محمد عوض ، دار الكتب العلمية ، بيروت : 4 / 95
- (23) عباس محمود العقاد (1967) " عبقرية الإمام علي " دار الكتاب العربي ، بيروت : 190.
- (24) المصدر السابق ، ص 196.
- (25) التستري ، محمد تقي : قضاء امير المؤمنين علي ابن ابي طالب (599-662م) : مطبعة الحيدري ، النجف - العراق.
- (26) المصدر السابق ، و ايضاً : احمد أمين (1964): التكامل في الاسلام ، دار الكتب ، النجف ، قم ، بيروت، المجلد 2 و 5.
- (27) توحيد المقامات هو مفهوم رياضي لتسهيل جمع أو طرح الكسور.
- (28) كتاب الرياضيات للصفوف الثانوية.
- (29) العالمي ، بهاء الدين (953-1031 م): كشكول البهائي ، تحقيق طاهر اخمد الزاوي. وكذلك احمد امسين : التكامل في الاسلام ، و التستري: قضاء امير المؤمنين علي ابن ابي طالب (599-662م).
- (30) التستري: قضاء امير المؤمنين علي ابن ابي طالب (599-662م). وكذلك ، يوسف مروة : العلوم الطبيعية في تراث الامام علي: مطبعة مروة العلمية ، بيروت.
- (31) محسن الأمين " أعيان الشيعة " ، دار التعارف : 343. وكذلك انظر : التستري ، محمد تقي : قضاء امير المؤمنين علي ابن ابي طالب.
- (32) علي بن أبي طالب : نهج البلاغة " ، شرح محمد عبده: مؤسسة الأعلمي بيروت ، (1993)
- (33) احمد أمين : التكامل في الاسلام : دار الكتب العالمية ، النجف ، بيروتن المجلد الثاني والخامس.
- (34) National Aeronautics and Space Administration – Solar System Exploration.
- (35) TygeOttesenBrahe (1546 - 1601) وهو من نبلاء الدنمارك عرف بأنه مهتماً بالفلك وكوكب الارض والكيمياء . ولد في مدينة سكانيا الدنماركية ، والتابعة الآن الى مملكة السويد.
- (36) Kepler Johannes (1571 - 1630) وهو عالم ألماني اشتهر بالرياضيات والفلك والتنجيم.



(37) **Cassini Giovanni** (1712-1625) وهو الطالي -فرنسي كان بارعاً بالفلك وعمل في شبابه في مرصد بزانو الايطالي ما بين 1648-1669 . ثم صار استاذاً في جامعة بولوكنا ، وفي 1671 اصبح مديراً لمرصد باريس الفرنسي.

(38) **Jean Richer** (1630-1696) وهو فلكي فرنسي وكان مساعداً لـ **Cassini Giovanni** (1625-1712). ما بين عام 1671 و 1673 غادر الى كينيا بطلب من اكااديمية العلوم الفرنسية لمراقبة المريخ ، وهذا الارصاد مكنته من ان يحسب المسافة بين الشمس والمريخ

(39) National Aeronautics and Space Administration – Solar System Exploration.

المصادر

- 1) احمد أمين (1964): التكامل في الاسلام ، دار الكتب ، النجف ، قم ، بيروت .
- 2) ابن الدمشقي ، شمس الدين ابي البركات محمد بن احمد : جواهر المطالب في مناقب علي (رض) . 76/1
- 3) التستري، تقي : قضاء امير المؤمنين علي ابن ابي طالب (599-662م) : مطبعة الحيدري ، النجف - العراق
- 4) ابو داود الازدي السجستاني (ت 275 هـ) : سنن أبي داود ، تحقيق شعيب الاناؤوط وآخرون: دار الرسالة العالمية.
- 5) العامللي ، بهاء الدين (953-1031 م): كشكول البهائي ، تحقيق طاهر احمد الزاوي.
- 6) عباس علي عبدالرضا ، مجالات تطبيق الرياضيات في الفقه الاسلامي ، الفصل الثالث : دار العباد ، بغداد، 2011.
- 7) عباس محمود العقاد (1967) " عبقرية الإمام علي " دارالكتاب العربي ، بيروت : 190.
- 8) علي بن أبي طالب : نهج البلاغة " ، شرح محمد عبده: مؤسسة الأعلمي بيروت ، (1993)



- (9) عز الدين ابن الأثير الجوزي (1994) ، أسد الغابة في معرفة الصحابة " تحقيق علي محمد عوض ، دار الكتب العلمية ، بيروت ، 95/4 .
- (10) محسن الأمين ، أعيان الشيعة : دار المعارف .
- (11) يوسف مروة : العلوم الطبيعية في تراث الامام علي: مطبعة مروة العلمية ، بيروت.
- (12) Berggren, J. Lennart (1997): Mathematics and her Sisters in Medieval Islam: A Selective of Work Done from 1985 to 1995, HistoriaMathematica, Karpinski, L. C. (1915): Latin Translation oh the Algebra of Al-Khwarizmi. The MacMillan Company: New York, London.
- (13) King, A. David (1988): A Medieval Arabic Report on Algebra before Al-Khwarizmi. Al -Masaq
- (14) National Aeronautics and Space Administration – Solar System E×ploration